ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНФЛИКТА

Козионов А. А., Россия, г. Астрахань, 2021 г.

Часть 1

Минимальной системой, позволяющей количественно исследовать динамические свойства конфликтов, является простой цикл взвешенного диграфа длиной 2. Данный цикл обозначает систему, состоящую из двух различных элементов (переменных) $X = \{A,B\}$ и двух взвешенных упорядоченных линий $Y = \{AB, BA\}$ с весами $a \neq 0$, $b \neq 0$ соответственно (Рис. 1).

$$A \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} B$$

Рис. 1

$$x \longrightarrow A \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightleftarrows}} B$$

Рис. 2

Для понимания механизма, определяющего активность реальных систем, рассмотрим модель системы, представленной на *Рис. 2*. Представленная здесь структурная схема демонстрирует тот факт, что элемент A является для данной системы исходным, т. е. служит особым «входом», который соединяет эту систему с внешней средой (или внешней для нее системой). Такая связь с внешней средой реализуется в момент получения элементом A некоторого количества энергии. Приток энергии появляется в A благодаря начальному импульсу x. Этот импульс x осуществляет запуск и активизирует всю систему через систему ее внутренних связей. То есть он направленно формирует внутри нее такие стартовые значения внутренних переменных, которые обеспечивают динамику ее активности в дальнейшем.

Особенности поведения системы во времени определяются в результате выполнения динамического анализа ее функционирования. Фактически мы должны исследовать математическую модель системы, которая описывает изменения во времени значений главных переменных после того, как система получила внешний импульс энергии.

Известно, что динамические системы существуют в трех и только в трех системных состояниях: ***синергия, антагонизм и конфликт***. Следовательно, анализ динамических свойств системы необходимо производить в отдельности, т.е. в соответствии со спецификой каждого из этих состояний.

Общее определение 1

Динамическую систему будем считать *автономной*, если после получения извне начального импульса энергии $\boldsymbol{x}$ она изменяется в дальнейшие периоды времени независимо от него.

Раскроем суть данного определения. Развитие системы происходит в потоке дискретного времени $t = n$, где n натуральный ряд целых чисел $n = 0$, 1, 2, 3 ..., а период дискретности представляет собой величину $\Delta t = 1$. Бинарная система, состоящая из двух элементов A и B, развивается в течение времени по правилам конкретных системных состояний.

Частное определение 1.1. **Синергия**.

Def 1.1. Бинарная система находится в состоянии синергетических, т.е. взаимно дружелюбных отношений (связей) в том случае, когда любые изменения, возникающие в одном элементе системы, вызывают пропорциональные изменения в другом элементе. Другими словами, усиление состояния, возникающее в первом элементе, вызывает пропорциональное усиление состояния во втором элементе, или ослабление, возникающее в первом элементе, вызывает ослабление во втором.

Эта дефиниция формально выглядит в виде: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{k}_*\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{k}_*\boldsymbol{A}$. В данной записи $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – это меняющиеся во времени состояния системы, $\boldsymbol{k}$ – это постоянный коэффициент пропорциональности, который независим от времени. При взаимном усилении состояний он принимает значение $\boldsymbol{k} > \boldsymbol{0}$, а в случае взаимного ослабления имеет значения $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{0}$.

В момент времени $t_0 = 0$ действие $\boldsymbol{x}$ порождает в элементе $\boldsymbol{A}$ состояние A_0. Состояние, возникшее в элементе $\boldsymbol{A}$, благодаря связи r_1 порождает действие B'_1 в элементе B. Действие B'_1 меняет состояние элемента $\boldsymbol{B}$ по внутреннему закону: $B_1 = \boldsymbol{k}_* B'_1$. Далее, в момент времени $t_1 = 1$ действие B'_1, появившееся в элементе $\boldsymbol{B}$, благодаря связи r_2 порождает действие A'_2 в элементе A. Действие A'_1 также меняет состояние элемента $\boldsymbol{A}$ по внутреннему закону: $A_1 = \boldsymbol{k}_* A'_1$. В момент времени $t_2 = 2$ действие A'_2 порождает действие B'_3 и т.д. При этом значение связи (АВ) принимаем как $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{a}$, а значение связи (ВА) как $\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{b}$.

Определение 2.1.

В динамической системе (Рис. 2) особенности изменения переменных A' и B' можно представить следующим образом:

$A'_{2n} = r_2 B'_{2n-1}$ (1) - четные моменты времени (для A),

$B'_{2n+1} = r_1 A'_{2n}$ (2) - нечетные моменты времени (для B).

Покажем обоснованность данного определения. Для этого рассмотрим динамический процесс, в котором изменения состояния одного элемента системы становиться причиной характерных изменений состояния другого элемента и наоборот. Для этих целей исследуем динамику процесса с дискретным шагом $\Delta t = \Delta n = 1$:

n = 0 $\quad A_0 \quad r_1 \longrightarrow B'_1 = r_1 A_0$

n = 1 $\quad A'_2 = r_2 B'_1 \longleftarrow r_2 \quad B'_1$

n = 2 $\quad A'_2 \quad r_1 \longrightarrow B'_3 = r_1 A'_2$

n = 3 $\quad A'_4 = r_2 B'_3 \longleftarrow r_2 \quad B'_3$

n = 4 $\quad A'_4 \quad r_1 \longrightarrow B'_5 = r_1 A'_4$ и т.д.

Видно, что:

$A'_{2n} = r_2 B'_{2n-1}$ (1) - четные моменты времени (для A), и $B'_{2n+1} = r_1 A'_{2n}$ (2) - нечетные моменты времени (для B).

Рассмотрим процесс формирования внутренних состояний для элементов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. С этой целью исследуем динамику процессов взаимодействий с дискретным шагом $\Delta t = \Delta n = 1$:

n = 0 $\quad \mathbf{A}_0 = A_0 \quad A_0 \quad r_1 \longrightarrow B'_1 \quad \mathbf{B}_1 = k * B'_1$

n = 1 $\quad \mathbf{A_2} = k * A'_2 \longleftarrow r_2 \quad B'_1$

n = 2 $\quad A'_2 \quad r_1 \longrightarrow B'_3 \quad \mathbf{B}_3 = k * B'_3$

n = 3 $\quad \mathbf{A_4} = k * A'_4 \quad A'_4 \longleftarrow r_2 \quad B'_3$

n = 4 $\quad A'_4 \quad r_1 \longrightarrow B'_5 \quad \mathbf{B}_5 = k * B'_5$ и т.д.

В этом случае общие состояния элементов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ выражаются следующими суммами:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_2} + \boldsymbol{A_4} + \boldsymbol{A_6} + \ldots + \boldsymbol{A_{2n}} =$$

$$= \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{k} * \boldsymbol{A_0} * [\, \boldsymbol{r_1 r_2} + (\boldsymbol{r_1 r_2})^2 + (\boldsymbol{r_1 r_2})^3 + (\boldsymbol{r_1 r_2})^4 + \ldots + (\boldsymbol{r_1 r_2})^{2n} \,]$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = \boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{B_3} + \boldsymbol{B_5} + \boldsymbol{B_7} + \ldots + \boldsymbol{B_{2n+1}} =$$

$$= \boldsymbol{r_1} * \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{k} * \boldsymbol{A_0} * [\, \boldsymbol{r_1 r_2} + (\boldsymbol{r_1 r_2})^2 + (\boldsymbol{r_1 r_2})^3 + (\boldsymbol{r_1 r_2})^4 + \ldots + (\boldsymbol{r_1 r_2})^{2n+1} \,]$$

В структурной схеме стрелками указаны направления порождения новых состояний в системе *(AB)*. Величины действий r_1 и r_2 выражают соответствующие отношения, то есть связи, между элементами *A* и *B*. Кроме того, из данной схемы следует, что в момент времени $t_0 = n_0 = 0$ элемент системы $\boldsymbol{A}$, находящийся в состоянии $\boldsymbol{A} = A'_0 = A_0$, благодаря отношению $(AB) = r_1$ передает свое состояние элементу системы $\boldsymbol{B}$. Начальное состояние второго элемента в момент времени $t_0 = 0$ имеет значение $\boldsymbol{B_0} = 1$, В результате воздействия B'_1 становится равным произведению: $B'_1 = r_1A_0$. При этом общее состояние $\boldsymbol{B}$ становится равным произведению первого элемента ряда B_1, на коэффициент $\boldsymbol{k}$, то есть $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_1} = \boldsymbol{k} * r_1A_0$. В следующий момент времени $t_1 = n_1 = 1$ отношение связи B'_1, благодаря системному действию $(BA) = r_2$ передается новому состоянию элементу $\boldsymbol{A}$. После этого возникает новое состояние элемента $\boldsymbol{A}$ равное $A'_2 = r_2B'_1 = r_1r_2A_0$. Применяя коэффициент обратной связи системы: $R = r_1r_2$, можно записать $A_2 = RA_0$. В результате оказанного воздействия общее состояние первого элемента $\boldsymbol{A_0}$ видоизменяется и становиться равным сумме, в которой предыдущее состояние A_0 складывается с произведением отношения r_2 на B'_1. Общее состояние элемента *A* при этом становиться равным сумме: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_2} = A_0 + RA_0$. В момент времени $t_2 = n_2 = 2$ элемент *A*, благодаря системному действию $(AB) = r_1$, передает возникшее в нем новое состояние элементу *B*.

Здесь важно обратить внимание на следующий момент: передается другому элементу не общее состояние $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_2}$, а лишь возникшая новая часть системного состояния равная A'_2. В результате последовательности системных отношений состояние связи превращается в $B'_3 = r_1A'_2 = r_1RA_0$. В момент $t_2 = 2$ новое состояние элемента $\boldsymbol{B}$ становится равным $\boldsymbol{B_3} = k * B'_3$. Тогда общее состояние элемента: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{B_3} = \boldsymbol{k} * (r_1A_0 + r_1RA_0)$. Далее, после каждого дискретного периода времени $\Delta t = 1$ элементы системы *A* и *B* последовательно друг за другом меняют значения своих состояний. В результате функционирования петли обратной связи, системный процесс начинает циклически повторяется во времени. В момент $t_3 = 3$ новое состояние первого элемента *A* становится равным $A_4 = RB_3$, а общее состояние $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 + A_4$; в момент $t_4 = 4$ новое состояние второго элемента *B* становится равным $B_5 = r_1A_4$, а общее состояние $\boldsymbol{B} = B_1 + B_3 + B_5$; в момент $t_5 = 5$ новое состояние первого элемента *A* становится равным $A_6 = RB_5$, а общее состояние $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 + A_4 + A_6$ и т.д.

Теорема 1

Вес связи r_i ($i = 1, 2$) в бинарной динамической системе (*AB*) можно представить в виде алгебраического отношения состояния одного элемента, выступающего *следствием,* к состоянию другого элемента, выступающего в отношении его, непосредственной *причиной*.

Доказательство. В соответствии с *Определением 2* известно, что $B_{2n+1} = r_1 A_{2n}$ и $A_{2n} = r_2 B_{2n-1}$. Данные соотношения приводят нас к выводу, что весовые коэффициенты соответствующих связей всегда можно определить, если знать предыдущие и последующие значения меняющихся во времени состояний элементов системы. Другими словами, весовые коэффициенты определяются формулами: $r_1 = B_{2n+1} / A_{2n}$ (1.1) $r_2 = A_{2n} / B_{2n-1}$ (1.2)

Теорема 2

В динамической бинарной системе, изображенной на *Рис. 2,* действие каждой переменной равняется произведению её предшествующего действия, умноженному на величину коэффициента обратной связи R.

Доказательство. Из *Определения 2* автоматически следует, что величина: $B_{2n-1} = r_1 A_{2(n-1)}$. Если подставить B_{2n-1} в выражение для A_{2n}, то получим выражение, в котором предыдущее состояние элемента A будет непосредственно связано с его последующим изменением: $A_{2n} = r_2 B_{2n-1} = r_2 r_1 A_{2(n-1)} = RA_{2(n-1)}$. Если подставить результат в выражение для B_{2n+1}, то определится предыдущее состояние элемента B в связи с его последующим изменением: $B_{2n+1} = r_1 A_{2n} = r_1 r_2 B_{2n-1} = RB_{2n-1}$. Можно заметить, что казуальный принцип выражен рекурсивными формулами для каждого из элементов A и B: $A_{2n} = RA_{2(n-1)}$ (2.1) $B_{2n+1} = RB_{2n-1}$ (2.2).

Из этих соотношений автоматически следует, что:

$R = B_{2n+1} / B_{2n-1}$ (2.3) $R = A_{2n} / A_{2(n-1)}$ (2.4) $A_{2n} / A_{2(n-1)} = B_{2n+1} / B_{2n-1}$ (2.5)

Теорема 3

Любые состояния в бинарной динамической системе (Рис. 2) определяются не только коэффициентом обратной связи системы R, но и двумя группами исходных состояний. В первую группу входят состояния, зависимые от внешнего импульса (A_0, B_1), а во вторую, те состояния, которые порождают последующую активность системы (A_2, B_3).

Доказательство. Согласно Теореме 2 для каждого из элементов A и B существуют рекурсивные формулы, связывающие их предыдущие и последующие состояния: $A_{2n} = RA_{2(n-1)}$; $B_{2n+1} = RB_{2n-1}$.

Если принять во внимание тот факт, что действие A_0 и действие B_1 зависят исключительно от внешнего импульса x, то при расчетах их следует воспринимать особыми состояниями системы. Учитывая этот факт, следует переписать имеющиеся рекурсивные выражения в следующем виде:

$$A_{2n} = R^{n-1} A_2 \quad (3.1)\ ; \qquad B_{2n+1} = R^{n-1} B_3 \quad (3.2)\ .$$

Поскольку, $B_{2n-1} = r_1A_{2(n-1)}$, тогда при $n = 1$ имеем $B_3 = r_1A_2$. Сделав несложные преобразования, получаем следующий вид зависимости B от A_2**:**

$B_{2n+1} = R^{n-1}B_3 = r_1 R^{n-1}A_2$. Окончательный результат можно представить в следующем виде: $A_{2n} = R^{n-1}A_2$ (3.3); $B_{2n+1} = r_1 R^{n-1}A_2$ (3.4) .

Полученные соотношения, по сути, выражают пошаговый процесс. Вполне очевидно, что действие A_4 достигается из A_2 за один цикл, в то время как действие A_6 становиться достижимым из A_2 за два цикла. Следовательно, действие A_{2n} будет достигнуто из A_2 за (n - 1) циклов. Аналогичным образом действие B_5 достигается из B_3 за один цикл; действие B_7 достигается из B_3 за два цикла, а любое действие B_{2n+1} будет достигнуто из B_3 за (n – 1) циклов.

Теорема 4

Для каждого дискретного момента времени $t = n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ общее состояние элементов A и B бинарной системы определяется соотношениями:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = x + R + R^2 + R^3 + \ldots + R^n = x + \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} \qquad (4.3)$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = r_1x + r_1 (R + R^2 + \ldots + R^n) = r_1 x + r_1\Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} \qquad (4.4)$$

Здесь x – внешний импульс воздействия на систему; $R = r_1r_2$ коэффициент петли обратной связи; r_1 и r_2 – веса связей между элементами системы [то есть, r_1 – прямая связь отношения (AB), а r_2 – обратная связь отношения (BA)], а суммирование производится от 1 до n.

Доказательство.

Последовательно используя формулу $A_{2n} = R^{n-1}A_2$, получим для некой последовательности $n = 1, 2, 3 \ldots n$:

$n = 1$; $t = 2$, $A_2 = A_2$; $n = 2$; $t = 4$, $A_4 = RA_2$; $n = 3$; $t = 6$, $A_6 = R^2A_2$ ……….
$n = \mathrm{n}$; $t = 2n$, $A_{2n} = R^{n-1}A_2$ и т.д.

Следовательно: $\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + A_2 + A_2R + A_2R^2 + \ldots + A_2 R^{n-1} =$

$$= A_0 + A_2 + A_2 (R + R^2 + \ldots + R^{n-1})$$

Последовательно применяя формулу $B_{2n+1} = R^{n-1}B_3$, получим:

$n = 1$; $t = 1$, $B_3 = B_3$; $n = 2$; $t = 3$, $B_5 = RB_3$; $n = 3$; $t = 5$, $B_7 = R^2B_3$ ……….
$n = \mathrm{n}$; $t = 2n+1$, $B_{2n+1} = R^{n-1}B_3$ и т.д.

Следовательно: $\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = B_1 + B_3 + B_3R + B_3R^2 + \ldots + B_3R^{n-1} =$

$$= B_1 + B_3 + B_3 (R + R^2 + \ldots + R^{n-1})$$

Итак, мы получили симметричную по внешнему виду систему уравнений для элементов A и B, представленную степенными рядами с дискретностью времени $\Delta t = 2$:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + A_2 + A_2(R + R^2 + \ldots + R^{n=1}), \qquad (4.1)$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = B_1 + B_3 + B_3(R + R^2 + \ldots + R^{n-1}) \qquad (4.2)$$

Для того, чтобы получить возможность в любой момент времени вычислять общие состояния элементов системы, нам необходимо определить четыре неизвестные функции: A_0, A_2, B_1, B_3.

Частное определение 1.2. **Антагонизм**.

Def 1.2. Бинарная система находится в состоянии антагонистических, т.е. взаимно враждебных отношений (связей) в том случае, когда любые изменения, возникающие в одном элементе системы, вызывают обратно пропорциональные изменения в другом элементе. Другими словами, усиление состояния, возникающее в первом элементе, вызывает пропорциональное ослабление состояния во втором элементе, а ослабление, возникающее в первом элементе, вызывает усиление во втором. Эта дефиниция формально выглядит в виде: $\boldsymbol{A \sim 1 / B}$ и $\boldsymbol{B \sim 1 / A}$. В данной записи $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – это меняющиеся во времени состояния системы.

В момент времени $t_0 = 0$ действие $\boldsymbol{x}$ порождает в элементе $\boldsymbol{A}$ состояние A_0. Состояние, возникшее в элементе $\boldsymbol{A}$, благодаря связи r_1 порождает действие B'_1 в элементе B. Действие B'_1 меняет состояние элемента $\boldsymbol{B}$ по внутреннему закону: $B_1 = 1 / B'_1$. Далее, в момент времени $t_1 = 1$ действие B'_1, появившееся в элементе $\boldsymbol{B}$, благодаря связи r_2 порождает действие A'_2 в элементе $\boldsymbol{A}$. Действие A'_1 также меняет состояние элемента $\boldsymbol{A}$ по внутреннему закону: $A_1 = 1 / A'_1$. В момент времени $t_2 = 2$ действие A'_2 порождает действие B'_3 и т.д. При этом значение связи (АВ) принимаем как $\boldsymbol{r_1 = -a}$, а значение связи (ВА) принимаем как $\boldsymbol{r_2 = - b}$.

Частное определение 1.3. **Конфликт**.

Def 1.3. Бинарная система пребывает в состоянии конфликтных, т.е. взаимно противоречивых нелогичных отношений (связей) в том случае, когда любые изменения, возникающие в одном элементе системы, автоматически вызывают противоположные изменения в другом элементе. Другими словами, активность любого элемента системы становится причиной торможения, коррекции или дезорганизации (уничтожения) всей системы в целом.

Эту дефиницию можно рассмотреть в виде *«стационарной модели конфликта» и в виде «циклической модели конфликта»*.

В «стационарной модели конфликта» мы выбираем один из двух вариантов: $\boldsymbol{A \sim B}$ и $\boldsymbol{B \sim 1 / A}$, либо противоположный: $\boldsymbol{A \sim 1 / B}$ и $\boldsymbol{B \sim A}$. Для расчетов данный выбор не принципиален. В этой записи $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – это меняющиеся во времени состояния системы.

В момент времени $t_0 = 0$ действие $\boldsymbol{x}$ порождает в элементе $\boldsymbol{A}$ состояние A_0. Состояние, возникшее в элементе $\boldsymbol{A}$, благодаря связи r_1 порождает действие B'_1 в элементе B. Действие B'_1 меняет состояние элемента $\boldsymbol{B}$ по внутреннему закону: $B_1 = 1/ B'_1$. Далее, в момент времени $t_1 = 1$ действие B'_1, появившееся в элементе $\boldsymbol{B}$, благодаря связи r_2 порождает действие A'_2 в элементе $\boldsymbol{A}$. Действие A'_1 тут же начинает менять состояние элемента $\boldsymbol{A}$ по внутреннему закону: $A_1 = A'_1$. В момент времени $t_2 = 2$ действие A'_2 порождает новое действие B'_3 и т.д. При этом значение связи (АВ) принимаем как $\boldsymbol{r_1 = -a}$, а значение связи (ВА) принимаем как $\boldsymbol{r_2 = +b}$.

«Циклическая модель конфликта» выглядит совершенно иначе. Ее можно представить в виде двух переходящих друг в друга вариантов «стационарной модели конфликта». Этап первый: [$\boldsymbol{A \sim B}$ и $\boldsymbol{B \sim 1 / A}$] переходит во второй этап: [$\boldsymbol{A \sim 1 / B}$ и $\boldsymbol{B \sim A}$], и затем второй – в первый, первый – во второй и такой циклический процесс может повторяться вновь и вновь. В данной записи $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – это меняющиеся во времени состояния системы.

В момент времени $t_0 = 0$ действие $\boldsymbol{x}$ порождает в элементе $\boldsymbol{A}$ состояние A_0. Состояние, возникшее в элементе $\boldsymbol{A}$, благодаря связи r_1 порождает действие B'_1 в элементе B. Действие B'_1 меняет состояние элемента $\boldsymbol{B}$ по внутреннему закону: $B_1 = 1 / B'_1$. Далее, в момент времени $t_1 = 1$ действие B'_1, появившееся в элементе $\boldsymbol{B}$, благодаря связи r_2 порождает действие A'_2 в элементе $\boldsymbol{A}$. Действие A'_1 меняет состояние элемента $\boldsymbol{A}$ по внутреннему закону: $A_1 = A'_1$. В момент времени $t_2 = 2$ действие A'_2 вновь порождает действие B'_3. Но далее процесс начинает идти по-другому. В момент $t_2 = 2$ действие B'_3 меняет состояние элемента $\boldsymbol{B}$ по внутреннему закону: $B_3 = B'_3$. Далее, в момент времени $t_3 = 3$ действие B'_3, появившееся в элементе $\boldsymbol{B}$, благодаря связи $-r_2$ порождает действие A'_2 в элементе $\boldsymbol{A}$. Действие A'_1 меняет состояние элемента $\boldsymbol{A}$ по внутреннему закону: $A_1 = 1 /A'_1$. При этом начальное значение связи (АВ) принимаем как $\boldsymbol{r_1 = -a}$, а значение связи (ВА) принимаем как $\boldsymbol{r_2 = +b}$.

Определение 2

В динамической системе (Рис. 2) особенности изменения переменных A и B можно представить следующим образом:

$A_{2n} = r_2 B_{2n-1}$ (1) - четные моменты времени (для A),

$B_{2n+1} = r_1 A_{2n}$ (2) - нечетные моменты времени (для B).

Покажем обоснованность данного определения. Для этого рассмотрим динамический процесс, в котором изменения состояния одного элемента системы становиться причиной характерных изменений состояния другого элемента и наоборот. Для этих целей исследуем динамику процесса с дискретным шагом $\Delta t = \Delta n = 1$:

$$
\begin{array}{llll}
n = 0 & A_0 & r_1 \longrightarrow & B_1 = r_1A_0 \\
n = 1 & A_2 = r_2B_1 & \longleftarrow r_2 & B_1 \\
n = 2 & A_2 & r_1 \longrightarrow & B_3 = r_1A_2 \\
n = 3 & A_4 = r_2B_3 & \longleftarrow r_2 & B_3 \\
n = 4 & A_4 & r_1 \longrightarrow & B_5 = r_1A_4 \quad \text{и т.д.}
\end{array}
$$

В этом случае общие состояния элементов A и B выражаются следующими суммами:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2n}$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = B_1 + B_3 + B_5 + B_7 + \ldots + B_{2n+1}$$

В структурной схеме стрелками указаны направления порождения новых состояний в системе (AB). Величины действий r_1 и r_2 выражают соответствующие отношения, то есть связи, между элементами A и B. Кроме того, из данной схемы следует, что в момент времени $t_0 = n_0 = 0$ элемент системы A, находящийся в состоянии $A = A_0$, благодаря отношению $(AB) = r_1$ передает свое состояние элементу системы B. В результате такого действия начальное состояние второго элемента, которое в момент времени $t_0 = 0$ имело значение $B_0 = 1$, тут же становится равным произведению: $B_1 = r_1A_0B_0$, то есть $B_1 = r_1A_0$. При этом общее состояние B еще остается равным первому элементу ряда B_1, то есть $\boldsymbol{B} = B_1 = r_1A_0$. В следующий момент времени $t_1 = n_1 = 1$ второй элемент системы B, уже находящийся в состоянии $\boldsymbol{B} = B_1$, благодаря системному действию $(BA) = r_2$ передает свое новое состояние элементу системы A. Возникает новое состояние элемента A равное $A_2 = r_2B_1 = r_1r_2A_0$. Применяя коэффициент обратной связи системы: $R = r_1r_2$, запишем $A_2 = RA_0$. В результате оказанного воздействия общее состояние первого элемента A_0 видоизменяется и становиться равным сумме ряда, в котором предыдущее состояние A_0 складывается с произведением отношения r_2 на новое состояние элемента B. Общее состояние элемента A при этом становиться равным сумме: $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 = A_0 + RA_0$. В момент времени $t_2 = n_2 = 2$ элемент A, благодаря системному действию $(AB) = r_1$, передает возникшее в нем новое состояние элементу B.

Здесь важно обратить внимание на следующий момент: передается другому элементу не общее состояние $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2$, а лишь возникшая новая часть этого общего состояния равная A_2. В результате системных отношений состояние элемента B меняется и превращается в $B_3 = r_1A_2 = r_1RA_0$. В момент $t_2 = 2$ общее состояние элемента B становится равным $\boldsymbol{B} = B_1 + B_3 = r_1A_0 + r_1RA_0$. Далее, после каждого дискретного периода времени $\Delta t = 1$ элементы системы A и B последовательно друг за другом меняют значения своих состояний. В результате функционирования петли обратной связи, системный процесс начинает циклически повторяется во времени. В момент $t_3 = 3$ новое состояние первого элемента A становится равным $A_4 = RB_3$, а общее состояние $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 + A_4$; в момент $t_4 = 4$ новое состояние второго элемента B становится равным $B_5 = r_1A_4$, а общее состояние $\boldsymbol{B} = B_1 + B_3 + B_5$; в момент $t_5 = 5$ новое состояние первого элемента A становится равным $A_6 = RB_5$, а общее состояние $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 + A_4 + A_6$ и т.д.

Теорема 1

Вес связи r_i ($i = 1, 2$) в бинарной динамической системе (AB) можно представить в виде алгебраического отношения состояния одного элемента, выступающего *следствием,* к состоянию другого элемента, выступающего в отношении его, непосредственной *причиной*.

Доказательство. В соответствии с *Определением 2* известно, что $B_{2n+1} = r_1A_{2n}$ и $A_{2n} = r_2B_{2n-1}$. Данные соотношения приводят нас к выводу, что весовые коэффициенты соответствующих связей всегда можно определить, если знать предыдущие и последующие значения меняющихся во времени состояний элементов системы. Другими словами, весовые коэффициенты определяются формулами: $r_1 = B_{2n+1} / A_{2n}$ (1.1) $r_2 = A_{2n} / B_{2n-1}$ (1.2)

Теорема 2

В динамической бинарной системе, изображенной на *Рис. 2,* действие каждой переменной равняется произведению её предшествующего действия, умноженному на величину коэффициента обратной связи R.

Доказательство. Из *Определения 2* автоматически следует, что величина: $B_{2n-1} = r_1A_{2(n-1)}$. Если подставить B_{2n-1} в выражение для A_{2n}, то получим выражение, в котором предыдущее состояние элемента A будет непосредственно связано с его последующим изменением: $A_{2n} = r_2B_{2n-1} = r_2r_1A_{2(n-1)} = RA_{2(n-1)}$. Если подставить результат в выражение для B_{2n+1}, то определится предыдущее состояние элемента B в связи с его последующим изменением: $B_{2n+1} = r_1A_{2n} = r_1r_2B_{2n-1} = RB_{2n-1}$. Можно заметить, что казуальный принцип выражен рекурсивными формулами для каждого из элементов A и B: $A_{2n} = RA_{2(n-1)}$ (2.1) $B_{2n+1} = RB_{2n-1}$ (2.2). Из этих соотношений автоматически следует, что:

$R = B_{2n+1} / B_{2n-1}$ (2.3) $R = A_{2n} / A_{2(n-1)}$ (2.4) $A_{2n} / A_{2(n-1)} = B_{2n+1} / B_{2n-1}$ (2.5)

Теорема 3

Любые состояния в бинарной динамической системе (Рис. 2) определяются не только коэффициентом обратной связи системы R, но и двумя группами исходных состояний. В первую группу входят состояния, зависимые от внешнего импульса (A_0, B_1), а во вторую, те состояния, которые порождают последующую активность системы (A_2, B_3).

Доказательство. Согласно Теореме 2 для каждого из элементов A и B существуют рекурсивные формулы, связывающие их предыдущие и последующие состояния: $A_{2n} = RA_{2(n-1)}$; $B_{2n+1} = RB_{2n-1}$.

Если принять во внимание тот факт, что действие A_0 и действие B_1 зависят исключительно от внешнего импульса x, то при расчетах их следует воспринимать особыми состояниями системы. Учитывая этот факт, следует переписать имеющиеся рекурсивные выражения в следующем виде:

$$A_{2n} = R^{n-1}A_2 \qquad (3.1)\ ; \qquad B_{2n+1} = R^{n-1}B_3 \quad (3.2)\ .$$

Поскольку, $B_{2n-1} = r_1A_{2(n-1)}$, тогда при $n = 1$ имеем $B_3 = r_1A_2$. Сделав несложные преобразования, получаем следующий вид зависимости B от A_2**:**

$B_{2n+1} = R^{n-1}B_3 = r_1 R^{n-1}A_2$. Окончательный результат можно представить в следующем виде: $A_{2n} = R^{n-1}A_2$ (3.3); $B_{2n+1} = r_1 R^{n-1}A_2$ (3.4) .

Полученные соотношения, по сути, выражают пошаговый процесс. Вполне очевидно, что действие A_4 достигается из A_2 за один цикл, в то время как действие A_6 становиться достижимым из A_2 за два цикла. Следовательно, действие A_{2n} будет достигнуто из A_2 за (n - 1) циклов. Аналогичным образом действие B_5 достигается из B_3 за один цикл; действие B_7 достигается из B_3 за два цикла, а любое действие B_{2n+1} будет достигнуто из B_3 за (n – 1) циклов.

Теорема 4

Для каждого дискретного момента времени $t = n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ общее состояние элементов A и B бинарной системы определяется соотношениями:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = x + R + R^2 + R^3 + \ldots + R^n = x + \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} \qquad (4.3)$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = r_1x + r_1 (R + R^2 + \ldots + R^n) = r_1 x + r_1\Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} \qquad (4.4)$$

Здесь x – внешний импульс воздействия на систему; $R = r_1r_2$ коэффициент петли обратной связи; r_1 и r_2 – веса связей между элементами системы [то есть, r_1 – прямая связь отношения (AB), а r_2 – обратная связь отношения (BA)], а суммирование производится от 1 до n.

Доказательство.

Последовательно используя формулу $A_{2n} = R^{n-1}A_2$, получим для некой последовательности n = 1, 2, 3 … n:

n =1; t = 2, $A_2 = A_2$; n = 2; t = 4, $A_4 = RA_2$; n = 3; t = 6, $A_6 = R^2A_2$ ………
n = n; $t = 2n$, $A_{2n} = R^{n-1}A_2$ и т.д.

Следовательно: $\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + A_2 + A_2R + A_2R^2 + \ldots + A_2 R^{n-1} =$

$$= A_0 + A_2 + A_2 (R + R^2 + \ldots + R^{n-1})$$

Последовательно применяя формулу $B_{2n+1} = R^{n-1}B_3$, получим:

n = 1; t =1, $B_3 = B_3$; n = 2; t = 3, $B_5 = RB_3$; n = 3; t = 5, $B_7 = R^2B_3$ ………
n = n; $t = 2n+1$, $B_{2n+1} = R^{n-1}B_3$ и т.д.

Следовательно: $\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = B_1 + B_3 + B_3R + B_3R^2 + \ldots + B_3R^{n-1} =$

$$= B_1 + B_3 + B_3 (R + R^2 + \ldots + R^{n-1})$$

Итак, мы получили симметричную по внешнему виду систему уравнений для элементов A и B, представленную степенными рядами с дискретностью времени $\Delta\, t = 2$:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + A_2 + A_2(R + R^2 + \ldots + R^{n=1}), \qquad (4.1)$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = B_1 + B_3 + B_3(R + R^2 + \ldots + R^{n-1}) \qquad (4.2)$$

Для того, чтобы получить возможность в любой момент времени вычислять общие состояния элементов системы, нам необходимо определить четыре неизвестные функции: A_0, A_2, B_1, B_3.

Опираясь на формулы, взятые из Определения 2:

$A_{2n} = r_2B_{2n-1}$; $B_{2n+1} = r_1A_{2n}$; $B_1 = r_1A_0$ а так же на формулы из Теоремы 3:

$A_{2n} = R^{n-1}A_2$; $B_{2n+1} = R^{n-1}B_3$; $B_{2n+1} = r_1 R^{n-1}A_2$,

получим:

$$A_2 = r_2B_1 = RA_0 \longleftarrow B_1 = r_1A_0$$

$$A_4 = r_2B_3 = RA_2 \longleftarrow B_3 = r_1A_2 = RB_1$$

$A_6 = r_2B_5 = RA_4 \longleftarrow B_5 = r_1A_4 = r_1RA_2 = RB_3$

$A_8 = r_2B_7 = RA_6 \longleftarrow B_7 = r_1A_6 = r_1R^2A_2 = R^2B_3$

… …

$A_{2n} = r_2B_{2n-1} = RA_{2(n-1)} \longleftarrow B_{2n+1} = r_1A_{2n} = r_1R^{n-1}A_2 = R^{n-1}B_3$

В процессе записи общих состояний элементов *A* и *B* воспользуемся методом дискретного приращения функций:

$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + \Delta A(1) + \Delta A(3) + \ldots$

$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = B_1 + \Delta B(2) + \Delta B(4) + \ldots$

Здесь мы следуем логике, что состояние каждого элемента бинарной системы с дискретным временным шагом меняется на величину соответствующего приращения. Важное примечание. Для элемента *A* все номера приращений будут *нечетны*, так как выражают разницу между последующим и предыдущим четными состояниями, а для элемента *B* номера приращений *четны*, поскольку демонстрируют разницу между последующим и предыдущим нечетными состояниями.

Для наглядности распишем последовательность приращения по порядку:

$\Delta A(1) = A_2 - A_0 = RA_0 - A_0 = A_0 (R - 1)$

$\Delta A(3) = A_4 - A_2 = RA_2 - A_2 = A_2 (R - 1)$

$\Delta A(5) = A_6 - A_4 = R^2A_2 - A_4 = R^2A_2 - RA_2 = A_2R (R - 1)$ и т.д.

…

$\Delta B(2) = B_3 - B_1 = RB_1 - B_1 = B_1(R - 1);$

$\Delta B(4) = B_5 - B_3 = RB_3 - B_3 = B_3(R - 1);$

$\Delta B(6) = B_7 - B_5 = RB_5 - B_5 = R^2B_3 - RB_3 = B_3R(R - 1).$ и т.д.

Из этих выражений легко получить значения для состояния элемента *A* в каждый момент времени:

$t = 0 \quad A_0 = x$

$t = 2 \quad A_2 = A_0 + \Delta A(1) = A_0 + A_0 (R - 1) = xR = R$

Важное замечание. Здесь мы предполагаем, что начиная с момента времени $t = 2$ воздействие импульса внешней системы на элемент A завершается. С этого времени величина импульса становится равной ($\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$). Из сделанного допущения автоматически следует, что в момент $t = 2$ состояние A превратится в $A_2 = R$ и соответствующим образом начнут видоизменятся все дальнейшие состояния A_{2n} в моменты времени $t = 2n \geq 2$.

$t = 4$ $\quad A_4 = A_2 + \Delta A(3) = xR + A_0 R(R - 1) = xR + xR(R - 1) = R^2$

$t = 6$ $\quad A_6 = A_4 + \Delta A(5) = xR^2 + xR^2(R - 1) = xR^3 = R^3$

...

$t = 2n$ $\quad A_{2n} = A_{2(n-1)} + \Delta A(2n-1)=R^n$

Аналогичным образом подвергнем преобразованиям значения состояния элемента B (для каждого момента времени):

$t = 1$ $\quad B_1 = r_1A_0 = r_1x$

$t = 3$ $\quad B_3 = B_1 + \Delta B(2) = B_1 + B_1 (R - 1) = r_1 x R$

Поскольку с момента времени $t \geq 2$ величина импульса становится равной $x = 1$, то это изменение отразится на всех последующих значениях состояния элемента B. Во-первых, в момент времени $t = 3$ состояние элемента станет $B_3 = r_1R$ и, во-вторых, при $t \geq 2$ изменятся все последующие состояния:

$t = 5$ $\quad B_5 = B_3 + \Delta B(4) = B_3 + B_3 (R - 1) = r_1R^2$

$t = 7$ $\quad B_7 = B_5 + \Delta B(6) = B_5 + B_5(R - 1) = r_1R^3$

...

$t = 2n+1$ $\quad B_{2n+1} = B_{2n-1} + \Delta B(2n) = r_1R^n$

С помощью таких преобразований можно определить ранее неизвестные для нас функции A_0, B_1, B_3, которые в рамках условий нашей задачи принимают соответствующие значения: $A_0 = x$, $A_2 = R$, $B_1 = r_1x$, $B_3 = r_1R$.

Для того, чтобы корректным образом выполнить вычисления для $\boldsymbol{A(t)}$ и $\boldsymbol{B(t)}$ обратимся к математической теории обработки сигнала. С этой целью преобразуем *Рис.2* в схему преобразования входного сигнала $X(t)$ в выходные сигналы $Y_A(t)$ и $Y_B(t)$.

Воспользуемся специальной функцией единичного сигнала, которую довольно часто используют в радиотехнике:

$\sigma(t-n) = \{\frac{1,\ \text{при}\ t=n}{0,\ \text{при}\ t\neq n}$. С помощью этой функции перепишем соответствующие выражения для $\boldsymbol{A}(t)$ и $\boldsymbol{B}(t)$.

$\boldsymbol{A}(t) = \Sigma_{n=0}\boldsymbol{A}_{2n} = A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \ldots =$

$= x\sigma(t-0) + R^1\sigma(t-2) + R^2\sigma(t-4) + R^3\sigma(t-6) + \ldots$

$\boldsymbol{A}(t) = \sum_{n=0}^{2n} \quad A_{2n} = \sum_{n=0}^{2n}[x+R^n]\,\sigma(t-2n)$

$\boldsymbol{B}(t) = \Sigma_{n=0}\boldsymbol{B}_{2n+1} = B_1 + B_3 + B_5 + B_7 + \ldots =$

$= r_1x\sigma(t-1) + r_1R^1\sigma(t-3) + r_1R^2\sigma(t-5) + r_1R^3\sigma(t-7) + \ldots$

$\boldsymbol{B}(t) = \sum_{n=0}^{2n+1} \quad B_{2n+1} = r_1\sum_{n=0}^{2n+1}[x+R^n]\,\sigma[t-(2n+1)]$

Следуя вышеизложенной логике, мы приходим к окончательному виду выражений, описывающих общие состояния элемента A и элемента B. В окончательном виде выражения принимают следующий вид:

$\boldsymbol{A} = \Sigma_n\boldsymbol{A}_{2n} = x + R + R^2 + R^3 + \ldots + R^n = x + \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}}$ (4.3)

$\boldsymbol{B} = \Sigma_n\boldsymbol{B}_{2n+1} = r_1x + r_1(R + R^2 + \ldots + R^n) = r_1x + r_1\Sigma_n R^{\boldsymbol{n}}$ (4.4)

Здесь мы можем выполнить проверку правильности полученных нами выводов. Если взять из формулы для $\boldsymbol{B}$ (4.4) сумму ряда $\Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} = -x + \Sigma_n\boldsymbol{A}_{2n}$, а затем ее подставить в выражение для элемента $\boldsymbol{A}$ (4.3), то получим выражение, описывающее взаимозависимость состояний элементов системы друг от друга: $\boldsymbol{B} = \Sigma_n\boldsymbol{B}_{2n+1} = r_1x + r_1(-x + \Sigma_n\boldsymbol{A}_{2n}) = r_1\Sigma_n\boldsymbol{A}_{2n}$.
(4.5)

Поскольку суммирование рядов выполнялось нами совершенно однотипно по индексу n = 0, 1, 2, 3 …, тогда из выражения $\Sigma_n\ (\boldsymbol{B_{2n+1}} - r_1\boldsymbol{A_{2n}}) = 0$, автоматически следует $\boldsymbol{B_{2n+1}} = r_1\boldsymbol{A_{2n}}$. Очевидно, что данное выражение полностью соответствует исходному соотношению, взятому нами ранее из Определения 2. Следовательно вывод формул (4.3) и (4.4) был выполнен совершенно верно, что и требовалось доказать.

Теорема 5

Значения общих состояний элементов A и B при произвольном значении n и при условии $R \neq 1$ имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{A} = x + \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} = x + \frac{1 - R^{n-1}}{1 - R} \qquad (5.1)$$

$$\boldsymbol{B} = r_1 x + r_1 \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} = r_1 x + r_1 \frac{1 - R^{n-1}}{1 - R} \qquad (5.2)$$

Доказательство.

Из теории математического анализа хорошо известно, что любая частная сумма ряда, который представляет собой геометрическую прогрессию, в диапазоне значений от $k = 1$ до $k = n$ (при $R \neq 1$) рассчитывается по формуле:

$$S_n = \Sigma_k\ a^{\boldsymbol{k}}|_{\mathrm{k=n}} = \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a}\ .$$

Подставляя частную сумму степенного ряда в формулы (4.3) и (4.4), получим в момент времени n результирующее значение для общих состояний элементов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} = x + \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} = x + \frac{1 - R^{n-1}}{1 - R}\ , \quad \boldsymbol{B} = r_1 x + r_1 \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} = r_1 x + r_1 \frac{1 - R^{n-1}}{1 - R}\ ,$$

что и требовалось доказать.

Следствия Теоремы 5

Следствие 1

Теорема 6

Общие состояния элементов A и B при условии $n \to \infty$ и при значениях коэффициента обратной связи, лежащего в диапазоне $(-\ 1 < R < 1)$ принимают следующие значения:

$\boldsymbol{A} \to \quad x + \frac{1}{R-1}$ (6.1)

$\boldsymbol{B} \to \; r_1 x + \frac{r1}{R-1}$ (6.2)

Доказательство.

В теории математического анализа доказано, что ряд геометрической прогрессии $\Sigma_n \, a^{\boldsymbol{n}}$ в диапазоне $(-\,1< a <1)$ и при $n\to\infty$ всегда стремится к предельному значению $\frac{1}{\mathrm{a}-1}$. Из этого автоматически следует, что:

$\boldsymbol{A}$ при $n\to\infty \;= \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = x + \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} \;\to\; x + \frac{1}{R-1}$ (5.1)

$\boldsymbol{B}$ при $n\to\infty \;= \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = r_1\, x + r_1\, \Sigma_n R^{\boldsymbol{n}} \to r_1 x + \frac{r1}{R-1}$ (5.2)

Следствия Теоремы 6

Следствие 1

Теорема 6

Общее состояние каждого элемента бинарной системы в любой момент времени можно вычислить благодаря следующим выражениям:

$A(t) = x + \frac{R^{\frac{t}{2}}}{\ln|R|}$ (6.1) $\qquad B(t) = r_1 x + \, r_1 \frac{R^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|R|}$ (6.2)

Доказательство.

Перейдем от дискретного представления времени (при котором $\Delta t = 2$) к непрерывному временному потоку (континууму), где $dt = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta t$.

Чтобы определить вид подинтегральной функции, вначале построим таблицу соотношений для A_{2n} и для $t = 2n$:

Таблица 1

A_{2n}	x	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	...
$t = 2n$	0	2	4	6	8	10	12	14	...

Представленные здесь соотношения демонстрируют очевидный факт, что величина степени n для функции R^n в точности совпадает с величиной $n = t/2$. Поскольку $\Delta t = 2$, то из этого факта следует, что $\Delta t/2 = 1$. В нашем случае зависимость элемента A от времени приобретает вид степенного ряда, причем каждый член этого ряда оказывается умноженным на приращение $\Delta t/2$. Выполнив соответствующие преобразования, получим:

$$A(t) = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = x + (\Delta t/2)R^n|_{2n=2} + (\Delta t/2)R^n|_{2n=4} + (\Delta t/2)R^n|_{2n=6} + \ldots + (\Delta t/2)R^n|_{2n} =$$

$$= x + (\Delta t/2)\ \Sigma_{2n} R^n$$

После преобразования функции $A(t)$ можно перейти к процедуре построения дифференциала. В этом случае получим: $dA(t) = \frac{1}{2} R^{\frac{t}{2}} dt$, поскольку по условиям задачи $\frac{dx}{dt} = 0$, то есть величина x не зависит от времени и, соответственно, $\lim_{dt \to 0} x = 0$. Интегрируя обе части уравнения, приходим к окончательному выражению для элемента A:

$$\mathrm{A(t)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{R}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{dt} \quad = \quad C1 + \frac{R^{\frac{t}{2}}}{\ln|R|} \quad = \ x + \frac{R^{\frac{t}{2}}}{\ln|R|} \quad ,$$

в данном случае величина постоянной $C1$ (независимой от времени), конечно же, принимается равной x.

Построим аналогичную таблицу соотношений для B_{2n+1} и для $t = 2n+1$.

Таблица 2

B_{2n+1}	r_1x	r_1R	r_1R^2	r_1R^3	r_1R^4	r_1R^5	r_1R^6	r_1R^7	...
$t = 2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	15	...

Соотношения показывают, что величина степени n в функции R^n соответствует величине $n = (t - 1)/2$. Кроме того, $\Delta t = 2$, а значит $\Delta t/2 = 1$. В этом случае зависимость элемента B от времени принимает следующий вид:

$$B(t) = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n+1}} = r_1x + r_1\,[(\Delta t/2)R^n|_{2n+1=3} + (\Delta t/2)R^n|_{2n+1=5} + (\Delta t/2)\,R^n|_{2n+1=7} + \ldots + (\Delta t/2)R^n|_{2n+1})]$$

Из этого автоматически следует, что: $dB(t) = \frac{1}{2}\, r_1 R^{\frac{t-1}{2}}\, dt$

Интегрируя обе части данного уравнения, приходим к выражению для элемента B:

$$\mathrm{B(t)} = \frac{1}{2} r_1 \int \mathrm{R}^{\frac{t-1}{2}}\,\mathrm{dt} \quad = \ C2 + r_1 \frac{R^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|R|} \quad = \quad r_1 x + \ r_1 \frac{R^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|R|}$$

в данном случае величину постоянной $C2$ выбираем равной r_1x.

В итоге получаем следующие соотношения:

$$A(t) = x + \frac{R^{\frac{t}{2}}}{\ln|R|} \quad (6.1) \qquad B(t) = r_1x + r_1\frac{R^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|R|} \quad (6.2),$$

что и требовалось доказать

Часть 2

Главное допущение, которое часто используется в процессе изучения динамики систем бинарного вида, состоит в том, что их поведение полностью определяется значениями параметров x, a и b. Именно поэтому, произведение $\boldsymbol{R = ab}$ весов влияния переменных A и B друг на друга принято считать особой $Const$ системы и называть ***коэффициентом* (*петли*) *обратной связи***. Из этого определения следует, что коэффициент R по своей сути должен представлять собой интегральный показатель знака и силы (веса) переменных, действующих в петле обратной связи друг на друга и на самих себя. Но давайте проверим, так ли это на самом деле?

Для того, чтобы всесторонне изучить эту проблему, постараемся ответить на следующие три вопроса:

1) как с течением времени импульс x, введенный в переменную A, изменяет значение самой переменной A?
2) как с течением времени импульс x, введенный в переменную A, изменяет значение переменной B?
3) всегда ли зависят состояния элементов A и B от коэффициента петли обратной связи R?

Вариант 1

В первом варианте нами будет исследована система, в которой элементы A и B абсолютно пассивны и инертны, то есть по своей природе они лишены собственной внутренней активности (см. Рис. 2). Можно сказать, что их специфическая активность, а также их энергия являются не только результатом внешнего импульса x, но и всех последующих внутрисистемных процессов. Следовательно, с формальной точки зрения: $A = A(x, r_2)$ и $B = B(r_1)$. Отношения (r_i), которые существуют между элементами A и B, остаются всегда постоянными. Мы будем их обозначать: $r_1 = a = Const1$, $r_2 = b = Const2$. Вначале рассмотрим ситуацию, когда динамические свойства элементов системы определяются как функции дискретного времени $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$ для элементов $A = A(x, b, n)$ и $B = B(a, n)$.

Таблица 3.

$t = n$	$A(x, r_2, n)$	Действие r_i	$B(r_1, n)$
0	x	a	1
1		b	a
2	b	a	
3		b	a^2
4	b^2	a	
5		b	a^3
6	b^3	a	
7		b	a^4
...	...	...	...
$2n$-1		a	a^n
$2n$	b^n	b	

Если записать представленные в Таблице 3 данные в виде суммы отдельных членов, то получим исходные уравнения для состояния элементов *A* и *B*:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2n} =$$

$$= x + в + в^2 + в^3 + \ldots + b^n = x + \sum_n b^n \quad (6.1)$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n-1}} = B_1 + B_3 + B_5 + B_7 + \ldots + B_{2n-1} =$$

$$= a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n = \sum_n a^n \quad (6.2)$$

Легко заметить, что элемент *A* однотипным образом воздействует на элемент *B* действием $r_1 = a$. Элемент *B* так же однотипно воздействует на элемент *A* действием $r_2 = b$. Каждый из этих элементов устроен таким образом, что способен вбирать и накапливать лишь оказанные на него системные воздействия, но при этом своим состоянием он не в силах оказывать влияние на другой элемент. Внутреннее состояние для элемента *A* в каждый момент времени $t = n$ будет зависеть лишь от суммы степенного ряда воздействия элемента *B* и, конечно же, от изначального импульса внешней системы x. Состояние же элемента *B* будет зависеть только лишь от суммы степенного ряда воздействия на него элемента *A*. В данном примере динамика рассматриваемой системы будет определяется исключительно воздействиями a и b.

Общие состояния элементов *A* и *B* меняются с каждым дискретным периодом времени $\Delta t = 2$. При этом элементы продолжают оказывать друг на друга всегда одно и тоже постоянное воздействие: *A* действует на *B* с силой a; *B* действует на *A* с силой b. Покажем это на примере изменения состояний:

$n = 0$ $\boldsymbol{A} = A_0 = x$

$n = 1$ $\boldsymbol{B} = B_1 = a$

$n = 2$ $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 = x + b$

$n = 3$ $\boldsymbol{B} = B_1 + B_3 = a + a^2$

$n = 4$ $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 + A_4 = x + b + b^2$ и т. д.

Сейчас попробуем себе представить ситуацию особого случая, когда $x = 0$. Другими словами, система изображенная на Рис. 2, по каким-то причинам не способна воспринимать импульсы извне. Кроме того, будем считать, что имеющиеся в системе значения переменных A и B не равны нулю. Тогда истинно: $A_{2(n+1)} = A_{2n}b$, $B_{2n+1} = B_{2n-1}a$. Совершенно очевидно, что каждое изменение значений переменных A и B, возникающее в период $\Delta\, t = 2$, будет однозначно обусловлено предшествующим значением состояния данного элемента, умноженным на коэффициент действия противоположного ему элемента. В этом случае общее состояние элемента будет равняться сумме ряда, который включает в себя текущее состояние этого элемента, а также все предшествующие ему состояния.

Из сказанного автоматически следует, что $b = A_{2(n+1)} / A_{2n}$ и $a = B_{2n+1} / B_{2n-1}$, то есть коэффициенты связей между элементами сами по себе полностью определяют динамику рассматриваемой системы. Значит, какова бы ни была индивидуальная природа переменных A и B, после того как они смогли образовать такую систему, они будут строго подчиняться только связывающему их системному закону.

Сейчас вновь перейдем от дискретного представления времени (при котором $\Delta t = 2$) к непрерывному временному потоку (континууму), где $dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$. Для определения вида подинтегральной функции, построим таблицу соотношений для A_{2n} и для $t = 2n$:

Таблица 4

A_{2n}	x	b	b^2	b^3	b^4	b^5	b^6	...	b^n
$t = 2n$	0	2	4	6	8	10	12	…	$2n$

Представленные в Таблице 4 соотношения демонстрируют тот факт, что величина степени n в элементе $A_{2n} = b^n$ в точности совпадает с функцией времени $n = t/2$. Кроме того, $\Delta\, t = 2$, а значит $\Delta\, t/2 = 1$. Из этого следует, что дифференциал функции $dA(t)$ будет равен: $dA(t) = \frac{1}{2}\, b^{\frac{t}{2}}\, dt$.

Интегрируя обе части уравнения, приходим к выражению для элемента *A*:

$$\mathrm{A(t)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{b}^{\frac{\mathrm{t}}{2}}\,\mathrm{dt} \quad = \quad C3 + \frac{b^{\frac{t}{2}}}{\ln|b|} \quad = x + \frac{b^{\frac{t}{2}}}{\ln|b|} \quad ,$$

в данном случае величину постоянной *С*3 выбираем равной *x*.

В результате приходим к ответу: $\mathrm{A(t)} = x + \frac{b^{\frac{t}{2}}}{\ln|b|}$ (7.1)

Построим аналогичную таблицу соотношений для B_{2n+1} и для $t = 2n+1$.

<u>Таблица 5</u>

B_{2n+1}	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	...	a^{n+1}
$t = 2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	…	$2n+1$

Соотношения показывают, что величина степени n в a^n в точности совпадает с функцией времени $n = (t - 1)/2$. Кроме того, $\Delta\, t = 2$, а значит $\Delta\, t/2 = 1$. Из этого следует, что: $dB(t) = \frac{1}{2}\, a^{\frac{t-1}{2}}\, dt$.

Интегрируя обе части уравнения, приходим к выражению для элемента *B*:

$$\mathrm{B(t)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{a}^{\frac{\mathrm{t-1}}{2}}\,\mathrm{dt} \quad = \quad C4 + \frac{a^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|a|} \quad = \quad \frac{a^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|a|} \quad ,$$

в данном случае величину постоянной *С*4, конечно же, выбираем равной *0*.

$$\mathrm{A(t)} = x + \frac{b^{\frac{t}{2}}}{\ln|b|} \quad (7.1) \qquad\qquad \mathrm{B(t)} = \frac{a^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|a|} \quad (7.2)$$

<u>Вывод очевиден:</u> полученные в результате вычислений состояния элементов *A* и *B* совершенно не зависят от значения коэффициента петли обратной связи *R*, а зависят лишь от действий элементов друг на друга.

<u>Вариант 2</u>

В данном варианте изначально определено, что элементы *A* и *B* обладают собственной внутренней активностью (см. Рис. 3). Общая активность системы в этом случае состоит из трех частей, во-первых, она проявляется в виде результата влияния внешнего импульса *x*, во-вторых, в виде всех последующих внутрисистемных процессов и, в-третьих, в виде собственных рефлексивных действий каждого элементов *A* и *B*. Следовательно, с формальной точки зрения мы можем записать: $A = A(x, a, R)$ и $B = B(b, R)$. Основным условием функционирования данной системы является то, что отношения (r_i), существующие между элементами A и B, всегда сохраняют свое постоянство, то есть: $r_1 = Const1$; $r_2 = Const2$; $R = r_1r_2 = Const3$. Отношения рефлексии элементов к самим себе также сохраняют свое постоянство: $(A \rightarrow A) = a$; $(B \rightarrow B) = b$. Запишем формулу общего коэффициента обратной связи системы, в которую должны по определению входить все три типа циклов. Она будет выглядеть так: $R_{общ} = r_a + r_1r_2 + r_b = a + R + b$. Динамические свойства элементов системы рассматриваются как функции дискретного времени $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$, то есть $A = A(x, a, R, n)$ и $B = B(b, R, n)$.

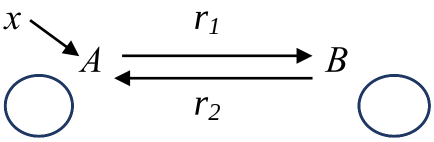

Рис. 3

Круги, изображенные на *Рис. 3* возле каждого из элементов A и B, служат для обозначения внутренней рефлексии элементов к самим себе.

Введем дополнительное условие.

Пусть действие $r_1 = r_a = a$; действие $r_2 = r_b = b$; $R = r_1r_2 = ab$. Другими словами, именно рефлексия элемента к самому себе фактически определяет активность действия этого элемента в отношении другого элемента системы.

Таблица 6.

$t = n$	Рефлексия	A_{2n}	r_i	B_{2n+1}	Рефлексия
0	a	ax	a	1	
1			b	$R = ab$	b
2	a	$R = ab$	a		
3			b	R^2	b
4	a	R^2	a		
5			b	R^3	b
6	a	R^3	a		

Внешний импульс x активизирует элемент A. Этот импульс осуществляет запуск активности системы. Особенностью элемента A является то, что он не только рефлексивен сам к себе активностью a, но и в отношении элемента B создает стимул такой же по величине, как и к самому себе, то есть импульс равный a. Это действие напоминает собой русскую пословицу: *«Мерять другого на свой аршин»*. Следовательно, при получении внешнего импульса x, элемент A благодаря собственной рефлексии автоматически изменит свое внутреннее состояние от 1 до $A_0 = ax$. Затем в этот же момент времени $t = 0$ он начнет действовать величиной a на элемент B. Элемент B так же рефлексивен сам к себе активностью $в$. В момент $t = 1$ в отношении элемента A он создает стимул равный $в$. Следовательно, при получении внешнего для себя импульса равного a, элемент B благодаря рефлексии не только меняет свое внутреннее состояние от 1 до $B_1 = ав = R$, но и оказывает действие на A. Обратим внимание на важный момент. В данной системе внешний импульс x активизирует исключительно только элемент A. Затем он тут же затухает до единицы и этим превращает состояние A_0 в состояние равное $A0 = a$. На элемент B сила этого внешнего импульса уже не оказывает никакого существенного воздействия.

Итак, при $t = 1$ элемент B действует на элемент A импульсом b. В результате этого воздействия элемент A активизируется, рефлексирует и меняет свое состояние на $A_2 = ab = R$, которое теперь уже способно сохраняться неизменным до следующего воздействия со стороны B. При $t = 2$ элемент A вновь действует на B импульсом a. Элемент B рефлексирует и меняет свое состояние на $B_3 = авR = R^2$. При $t = 3$ элемент B действует на A импульсом b. Рефлексируя, элемент A вновь меняет свое новое состояние и становиться $A_4 = R^2$ и т. д.

Сейчас рассмотрим ряд особенностей формирования общих состояний для элементов системы. Итак, в момент времени $t_1 = 1$ второй элемент системы B, уже находящийся в состоянии $\boldsymbol{B} = B_1 = R$, благодаря системному действию $(BA) = b$ передает свой импульс b элементу A. В результате такого воздействия общее состояние первого элемента A_0 видоизменяется и становиться равным сумме, в которой предыдущее состояние A_0 складывается с произведением отношения b на рефлексию элемента A к самому себе. Можно видеть, что в результате возникает новое состояние элемента A равное $A_2 = ab = R$. Общее же состояние элемента A тут же меняется и становиться равным: $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 = ax + R$. В момент времени $t_2 = 2$ элемент B получает импульс a от элемента A и объединяет его с рефлексией к самому себе.

Следует обратить внимание на <u>важный момент</u>! Элементу B передается не общее состояние $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2$, а лишь конкретный импульс действия равный a. В результате такого процесса состояние элемента B меняется и тут же превращается в $B_3 = abR = R^2$. В этот момент общее состояние элемента B так же меняется и становится равным $\boldsymbol{B} = B_1 + B_3 = R + R^2$. Итак, можно заметить, что после каждого дискретного периода времени $\Delta t = 1$ элементы системы A и B последовательно друг за другом изменяют значения своих состояний. В результате взаимовлияния системный процесс циклически повторяется во времени. В момент t_3 = 3 возникает новое состояние элемента A в результате действия со стороны B и внутренней рефлексии. Оно становится равным $A_4 = R^2$, а общее состояние: $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 + A_4 = ax + R + R^2$. В момент t_4 = 4 возникает новое состояние элемента B (конечно же, в результате действия со стороны A и внутренней рефлексии). Оно становится равным $B_5 = R^3$, а общее состояние: $\boldsymbol{B} = B_1 + B_3 + B_5 = R + R^2 + R^3$. В момент t_5 = 5 возникает новое состояние элемента A, которое становится равным $A_6 = R^3$. При этом общее состояние: $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 + A_4 + A_6 = ax + R + R^2 + R^3$ и т. д.

На основании выполненных рассуждений довольно легко прийти к следующей записи уравнения для общих состояний элементов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2n} =$$

$$= ax + R + R^2 + R^3 + \ldots + R^n = ax + \sum_n R^n \quad (8.1)$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n-1}} = B_1 + B_3 + B_5 + B_7 + \ldots + B_{2n-1} =$$

$$= R + R^2 + R^3 + R^4 + \ldots + R^n = \sum_n R^n \quad (8.2)$$

Из полученных формул следует, что после того, как начальный импульс x сумел достичь переменной A, *все дальнейшие изменения состояний A и B строго обуславливаются одним лишь увеличением степени коэффициента R, но при этом совершенно не зависят от общего коэффициента всех трех петель* $R_{общ} = r_a + r_1 r_2 + r_b = a + R + b$.

В этом случае очевидно, что $R = A_{n+2}/A_n = B_{n+3}/B_{n+1}$. Другими словами коэффициент обратной связи R полностью определяет динамику рассматриваемой системы, то есть значения состояний A и B будут изменяться относительно самих себя ровно на величину R. Значит, какова бы ни была индивидуальная природа переменных A и B, после того как они образовали замкнутую систему, они автоматически станут подчиняться одному и тому же системному закону.

Сейчас перейдем от дискретного представления времени ($\Delta t = 2$) к непрерывному временному потоку (континууму), где $dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t.$

Для определения вида подинтегральной функции, вначале построим таблицу соотношений для A_{2n} и для $t = 2n$:

Таблица 7

A_{2n}	ax	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	...	R^n
$t = 2n$	0	2	4	6	8	10	12	…	$2n$

Представленные в Таблице 4 соотношения демонстрируют тот факт, что величина степени k в элементе $A_{2n} = R^n$ в точности совпадает с функцией времени $n = t/2$. Кроме того, $\Delta t = 2$, а значит $\Delta\, t/2 = 1$. Из этого следует, что дифференциал функции $dA(t)$ будет равен: $dA(t) = \frac{1}{2}\, R^{\frac{t}{2}}\, dt$.

Интегрируя обе части уравнения, приходим к выражению для элемента A:

$$\mathrm{A(t)} = \frac{1}{2} \int \mathrm{R}^{\frac{t}{2}}\, \mathrm{dt} \quad = \; C5 + \frac{R^{\frac{t}{2}}}{\ln|R|} \; = \; ax + \frac{R^{\frac{t}{2}}}{\ln|R|} \quad ,$$

в данном случае величину постоянной $C5$, конечно же, выбираем равной аx.

В результате получаем окончательный ответ: $$\mathrm{A(t)} = ax + \frac{R^{\frac{t}{2}}}{\ln|R|} \qquad (9.1)$$

Построим аналогичную таблицу соотношений для B_{2n+1} и для $t = 2n+1$.

Таблица 8

B_{2n+1}	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	...	R^{n+1}
$t = 2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	…	$2n+1$

Соотношения показывают, что величина степени n в R^n в точности совпадает с функцией времени $n =(t - 1)/2$. Кроме того, $\Delta\, t = 2$, а значит $\Delta\, t/2 = 1$. Из этого следует, что дифференциал функции $B(t)$ будет равен:

$$dB(t) = \frac{1}{2}\, R^{\frac{t-1}{2}}\, dt \quad .$$

Интегрируя обе части уравнения, приходим к выражению для элемента A:

$$\mathrm{B(t)} = \frac{1}{2} \int \mathrm{R}^{\frac{t-1}{2}}\, \mathrm{dt} \quad = \; C6 + \frac{R^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|R|} \; = \; \frac{R^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|R|} \quad ,$$

в данном случае величину постоянной $C6$, конечно же, выбираем равной 0.

В результате получаем окончательный ответ: $$\mathrm{B(t)} = \frac{R^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|R|} \qquad (9.2)$$

<u>Вариант 3</u>

В варианте № 3 рассмотрим динамику причинно-следственных отношений в системе, обусловленной процессом внутренней системной саморегуляции. Структура этих отношений представлена на Рис. 4 и Рис. 5.

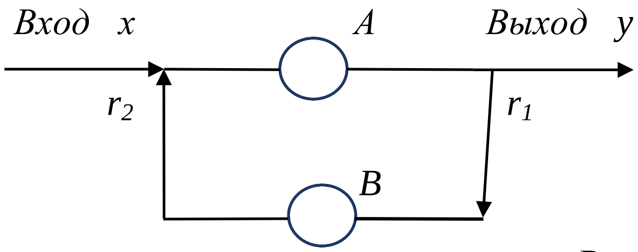

Рис. 4

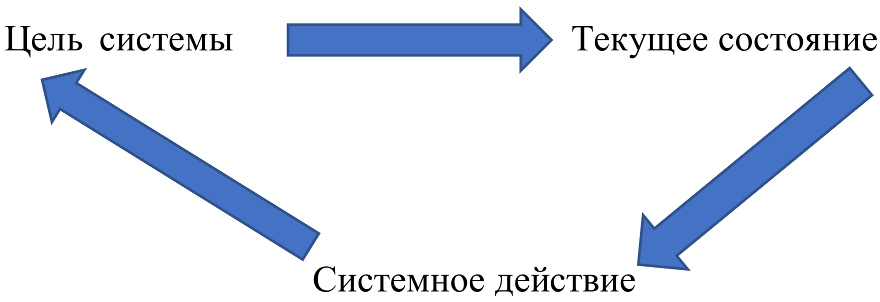

Рис. 5

Мы рассматриваем систему, в которой есть постоянно действующий входящий сигнал (x). Система преобразует поступивший сигнал и по заданному алгоритму формирует выходной сигнал (y). В данном случае предполагаем, что элементы системы A и B обладают внутренней линейной активностью (см. Рис. 4).

В системе элемент B выполняет особую роль. Его активность выражает внутреннюю *Цель системы*. Благодаря наличию петли обратной связи элемент B реализует функцию контроля, то есть стоит на страже баланса системы. Он способен влиять на *Текущее состояние* элемента A и благодаря этому регулирует выходной сигнал y (см. Рис. 5). Коэффициент общей активности системы представляет собой произведение влияния внешнего импульса x на системные действия элементов A и B: $Q = xr_1r_2 = xR$.

Особым условиям функционирования системы можно отнести то, что внутрисистемные отношения (r_i), существующие между элементами A и B, сохраняют свое постоянство, то есть: $r_1 = Const1$; $r_2 = Const2$; $R = r_1r_2 = Const3$, но исключительно только в заданном диапазоне значений B, то есть, если $B < B^*_{верх.}$ и, если $B > B^*_{нижн.}$. Сами же величины $B^*_{верх.}$ и $B^*_{нижн.}$ в данном случае выступают пороговыми значениями, регулирующими эффективность работы системы в целом. Например, если значение B по каким-то причинам выходит за границы диапазона [$B^*_{верх.}$, $B^*_{нижн.}$], то величина действия B на A тут же меняет знак на противоположный, становясь $r_2 = - b$. Если же значения B вновь соответствуют диапазону [$B^*_{верх.}$, $B^*_{нижн.}$], то величина действия B на A примет свое первоначальное значение, то есть станет равной $r_2 = b$. В принципе для обеспечения процесса регулировки возможны и другие варианты действий, обеспечивающие мониторинг и текущий контроль за работоспособностью и функционированием системы (например, уменьшение величины b, уменьшение величины b с одновременной сменой знака и т. д.).

Упростим обозначения. Пусть действие $r_1 = a$; действие $r_2 = b$; $R = r_1r_2 = ab$; $Q = xR$. Будем считать, что динамические свойства элементов данной системы являются функцией дискретного времени t = 0, 1, 2, 3 …, то есть $A = A(x,\ a,\ Q,\ n)$ и $B= B(x,\ b,\ Q,\ n)$. На первом этапе исследования модели выполним рассчет состояний элементов в той области значений, когда система стабильно функционирует в диапазоне значений [$B^*_{верх.}$, $B^*_{нижн.}$].

Таблица 9.

$t = n$	Вход	A_{2n}	r_i	B_{2n+1}	Выход
0	x	ax	a		$A= ax$
1			b	$axb= xR$	
2	x	ax^2R	a		$A= ax+ ax^2R$
3			b	x^2R^2	
4	x	ax^3R^2	a		$A= ax+ ax(xR+x^2R^2)$
5			b	bx^3R^3	
6	x	ax^4R^3	a		$A= ax+ ax(xR+ x^2R^2+ x^3R^3)$

Внешний импульс x постоянно активизирует элемент A. Именно этот импульс осуществляет запуск системы, а затем продолжает поддерживать ее активность. В момент времени $t = 0$ элемент A, получив внешний импульс x автоматически меняет свое внутреннее состояние от 1 до $A_0 = ax$. В этот же самый момент времени $t = 0$ элемент A начинает действовать импульсом a на элемент B. Элемент B получает от элемента A состояние ax и превращает его в свое новое состояние равное $axb= xR$. Затем, в момент времени $t = 1$, элемент B оказывает действие на элемент A импульсом равным *в* и передает ему свое новое состояние. В итоге элемент A накладывает на полученное от B состояние свою активность равную a и, конечно же, внешний импульс x. В результате его новое состояние превращается в $A_2 = ax^2R$. При $t = 2$ элемент A вновь действует на B своим импульсом a. При $t = 3$ элемент B своим измененным состоянием $B_3 = x^2R^2$ действует на A импульсом b. Элемент A вновь обретает свое новое состояние и становится равным $A_4 =ax^3R^2$ и т. д.

Сейчас обратим внимание на процесс формирования общих состояний для элементов системы. Итак, в момент времени $t_1 = 1$ второй элемент системы B, уже находящийся в состоянии $\boldsymbol{B} = B_1 = xR$, благодаря системному действию $(BA) = b$ передает свой импульс b элементу A. В результате такого воздействия общее состояние элемента A видоизменяется. Оно становиться равным сумме, в которой предыдущее состояние A_0 складывается с новым состоянием элемента A равным ax^2R. В результате возникает общее состояние элемента: $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2 = ax + ax^2R$. В момент времени $t_2 = 2$ элемент B получает импульс a от элемента A. Здесь мы обращаем внимание читателя на тот факт, что элементу B передается не все состояние $\boldsymbol{A} = A_0 + A_2$, а лишь новое состояние равное $A_2 = ax^2R$. В результате такого процесса новое состояние элемента B меняется и тут же превращается в $B_3 = bx^2R^2$. В этот момент общее состояние элемента B претерпевает трансформацию и становится равным $\boldsymbol{B} = B_1 + B_3 = xR + x^2R^2$.

Итак, после каждого дискретного периода времени $\Delta t = 1$ под воздействием внешнего импульса x элементы системы A и B последовательно друг за другом начинают менять значения своих состояний. В результате системный процесс стабилизируется и циклически продолжается во времени.

На основании выполненных рассуждений, мы приходим к записи уравнений для общих состояний элементов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} = \Sigma_n \boldsymbol{A_{2n}} = A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \ldots + A_{2n} =$$

$$= ax + ax(xR + x^2R^2 + x^3R^3 + \ldots + x^{m-1}R^{m-1}) = ax\textstyle\sum_m x^{m-1}R^{m-1} \quad (10.1)$$

$$\boldsymbol{B} = \Sigma_n \boldsymbol{B_{2n-1}} = B_1 + B_3 + B_5 + B_7 + \ldots + B_{2n-1} =$$

$$= xR + x^2R^2 + x^3R^3 + x^4R^4 + \ldots + x^mR^m = \textstyle\sum_m x^mR^m \quad (10.2)$$

для $m = 1, 2, 3, \ldots$

Вид данных выражений приводит нас к очевидному выводу, что внешний импульс x и собственная активность a, воздействуя на переменную *A, обуславливают дальнейшие изменения общего состояния A, поскольку для каждого* ($m = n - 1$) *создают новое состояние равное* $axQ^n = ax(xR)^n$, *а все новые изменения состояния B для каждого* ($m = n$) *определяются исключительно только внешним импульсом x, поскольку в петле обратной связи с коэффициентом R он формируют новое состояние равное* $Q^n = (xR)^n$.

Легко проверить, что $Q = A_{n+2}/A_n = B_{n+3}/B_{n+1}$. Другими словами коэффициент обратной связи Q превращается в системообразующий фактор, определяющий динамику рассматриваемой системы. То есть, все значения состояний A и B будут изменяться относительно самих себя ровно на величину Q. Значит, какова бы ни была индивидуальная природа переменных A и B, после того как они образовали замкнутую систему, они автоматически подчиняются одному и тому же системному закону.

Сейчас перейдем от дискретного представления времени (при котором Δt = *2*) к непрерывному временному потоку (континууму), где $dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$.

Для определения вида подинтегральной функции построим таблицу соотношений для A_{2n} и для $t = 2n$:

Таблица 10

A_{2n}	ax	axQ	axQ^2	axQ^3	axQ^4	axQ^5	axQ^6	…	axQ^n
$t = 2n$	0	2	4	6	8	10	12	…	$2n$

Представленные в Таблице 4 соотношения указывают на тот факт, что величина степени k в элементе $A_{2n} = axQ^n$ в точности совпадает с функцией времени $n = t/2$. Кроме того, $\Delta\, t = 2$, а значит $\Delta\, t/2 = 1$. Из этого следует, что дифференциал функции $dA(t)$ будет равен: $dA(t) = \frac{1}{2}\, axQ^{\frac{t}{2}}\, dt$.Интегрируя обе части уравнения, приходим к выражению для элемента A:

$$\mathrm{A(t)} = \frac{1}{2} \mathrm{ax} \int \mathrm{Q}^{\frac{t}{2}}\, \mathrm{dt} \quad = \quad C7 + ax \frac{Q^{\frac{t}{2}}}{\ln|Q|} \quad = \quad ax + ax \frac{Q^{\frac{t}{2}}}{\ln|Q|} \quad ,$$

в данном случае величину постоянной $C7$, конечно же, выбираем равной аx.

В результате получаем окончательный ответ: $\mathrm{A(t)} = ax + ax \frac{Q^{\frac{t}{2}}}{\ln|Q|}$ (9.1)

Построим аналогичную таблицу соотношений для B_{2n+1} и для $t = 2n+1$.

Таблица 11

B_{2n+1}	Q	Q^2	Q^3	Q^4	Q^5	Q^6	Q^7	…	Q^{n+1}
$t = 2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	…	$2n+1$

Соотношения показывают, что величина степени n в Q^n совпадает с функцией времени $2n = (t - 1)$. Кроме того, $\Delta\, t = 2$, а значит $\Delta\, t/2 = 1$. Из этого следует, что дифференциал функции $B(t)$ будет равен: $dB(t) = \frac{1}{2}\, Q^{\frac{t-1}{2}}\, dt$. Интегрируя обе части уравнения, приходим к выражению для элемента A:

$$\mathrm{B(t)} = \frac{1}{2} \int \mathrm{Q}^{\frac{t-1}{2}}\, \mathrm{dt} \quad = \quad C8 + \frac{Q^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|Q|} \quad = \quad \frac{Q^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|Q|} \quad ,$$

в данном случае величину постоянной $C6$ выбираем равной 0.

Получаем окончательный ответ: $\mathrm{B(t)} = \frac{Q^{\frac{t-1}{2}}}{\ln|Q|}$ (9.2)

<u>Вывод:</u> полученные в результате вычислений состояния элементов *A* и *B* полностью зависят от значений коэффициента петли обратной связи $Q = xR$.